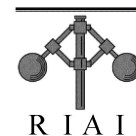




ScienceDirect  
Disponible en [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 11 (2014) 417–425

[www.elsevier.es/RIAI](http://www.elsevier.es/RIAI)

## Modelo Biomecánico de una Prótesis de Pierna

Diego A. Bravo M<sup>a,\*</sup>, Carlos F. Rengifo R<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Física, Universidad del Cauca, Calle 5 No. 4-70, Popayán, Colombia.

<sup>b</sup>Departamento de Electrónica, Instrumentación y Control, Universidad del Cauca, Calle 5 No. 4-70, Popayán, Colombia.

### Resumen

En este trabajo se presenta el modelo biomecánico de una prótesis de pierna. Con el objetivo de estudiar el cambio de velocidad en la unión prótesis-muñón al momento del impacto del pie con el suelo, está se modeló como un sistema resorte-amortiguador, permitiendo evidenciar la necesidad de construir la unión muñón-prótesis con dispositivos de impedancia mecánica variable. Además se desarrolló un simulador con el objetivo de hacer representaciones virtuales de un paciente con prótesis. Para ello se modeló al paciente como un robot bípedo planar, el simulador permite estudiar el efecto de las fuerzas de impacto con el suelo de la unión prótesis-muñón como una etapa anterior a la implementación real de la misma. Copyright © 2014 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

**Palabras Clave:** Marcha humana, Modelo biomecánico, prótesis, simulación.

### 1. Introducción

El uso de la robótica para asistencia médica va en aumento, (Dellon and Matsuoka, 2007). Actualmente, grandes centros de rehabilitación están incluyendo el uso de sistemas robóticos para facilitar los procesos de rehabilitación en aquellas condiciones de salud donde se requiere la práctica de acciones específicas con repetición constante y precisa, como es el caso del entrenamiento de la marcha en pacientes con secuelas de enfermedad cerebrovascular (ECV) o trauma craneoencefálico (TEC). Estos robots han sido diseñados para contribuir al fortalecimiento de las extremidades débiles o asistir a las sesiones de entrenamiento, (Jiménez-Fabián and Verlinden, 2012, Martins et al., 2012).

La investigación en robots bípedos ha contribuido al desarrollo de prótesis de pierna activa o pasiva, (Hermini et al., 2001, Kim and Oh, 2001, Rovetta and Chettibi, 2003). La tecnología robótica puede ayudar a construir robots bípedos que permitan emular la marcha humana, (Vazquez and Velasco-Villa, 2013), encaminada a construir prótesis inferiores o exoesqueletos que ayuden a caminar y a realizar otras actividades musculares que de otro modo serían imposibles. En los trabajos, (Karimi and Tahani, 2010, Nandi et al., 2009) se diseñan patrones de movimiento para la articulación de la rodilla de prótesis activas utilizando técnicas propias de la robótica bípeda como la generación de trayectorias basada en captura de movimiento humano.

En proyectos desarrollados recientemente, (Hobara et al., 2013, Wentink et al., 2013, Xie et al., 2010) se evidencia la necesidad de utilizar actuadores de impedancia variable en el diseño de las prótesis, puesto que la marcha humana está compuesta de distintas fases y ciclos, en los que la rigidez de la articulación debe ser variable en el tiempo para permitir al paciente un ciclo de marcha que se aproxime al normal, (Lee et al., 2012).

La cinesiología de la marcha es la rama de la biomecánica que se encarga de definir la marcha humana, distinguir las fases y ciclos de la marcha. Además, determina las fuerzas que intervienen en un ciclo de marcha completo, (Cifuentes et al., 2010). Con base en esta información, algunos investigadores abordan el diseño e implementación de prótesis de miembro inferior teniendo en cuenta los distintos modelos dinámicos de la marcha humana, (Ferris et al., 2012, Pejhan et al., 2008, Whittlesey et al., 2000). Sin embargo, en estos trabajos no se dispone de una plataforma computacional que permita simular las fuerzas que intervienen durante el ciclo de marcha y el ajuste de los parámetros dinámicos de la prótesis se realiza experimentalmente. Surge entonces la pregunta ¿Existe alguna herramienta software, que permita modelar y simular el comportamiento dinámico de una prótesis sometida a restricciones geométricas y físicas?

Para responder esta pregunta, se hizo un estudio sobre el estado del arte en simuladores que permitan modelar y simular el comportamiento dinámico de una prótesis de pierna. Los resultados obtenidos se pueden resumir en la tabla 1. Ahí, se presenta una lista de herramientas software que permiten simular el comportamiento dinámico de sistemas mecánicos. Algunas

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [dibravo@unicauca.edu.co](mailto:dibravo@unicauca.edu.co) (Diego A. Bravo M), [caferen@unicauca.edu.co](mailto:caferen@unicauca.edu.co) (Carlos F. Rengifo R)

de ellas como *ODE* o *Bullet* son librerías que el usuario integra desde un programa escrito en C o C++. *Physion* o *Box2D* son entornos de simulación 2D orientados a la enseñanza de la física. Otras herramientas como *Webots*, *VRep*, *Morse* o *Gazebo* son complejos entornos gráficos para simulación de robots. La característica común de las herramientas anteriormente mencionadas es que no entregan las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico de la cadena cinemática que se modela. Aparece entonces otro interrogante ¿En qué situaciones se requiere conocer explícitamente estas ecuaciones?.

En el caso del diseño de prótesis activas, estas ecuaciones son un insumo fundamental para el diseño del sistema de control de los actuadores de la prótesis. Después del estudio anterior se concluye que no existe en el mercado una herramienta software que permita al mismo tiempo modelar, simular y sintonizar un controlador para el diseño de prótesis activas. Es por esta razón, que en este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo dinámico para la simulación y control de una prótesis activa de pierna en el entorno de programación MATLAB ©.

Tabla 1: Herramientas software para simulación de sistemas mecánicos.

ODE	www.ode.org
Bullet	bulletphysics.org
Physics	developer.nvidia.com
Webots	www.cyberbotics.com
VRep	www.coppeliarobotics.com

En este artículo se explica el desarrollo y simulación del modelo mecánico de una prótesis de pierna, para ello las piernas y la cadera de un ser humano, se modelaron como el robot bípedo planar, ilustrado en la Figura 1. Dicho robot tiene 7 grados de libertad, uno a nivel de cada cadera, uno a nivel de cada rodilla, uno a nivel de cada tobillo y uno entre la cadera y la rodilla de la pierna derecha que emula una prótesis.

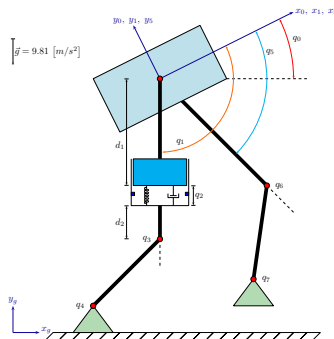


Figura 1: Robot Bípedo planar con prótesis de pierna

El modelo utilizado para simular el sistema descrito anteriormente tiene dos componentes principales. El primero describe la interacción entre los cuerpos del robot y el segundo calcula las fuerzas de reacción entre el pie y el suelo. Con respecto al segundo componente la principal dificultad viene de la multiplicidad de contactos entre el pie y el suelo. En el caso de un robot con pies rectangulares que se desplaza sobre un terreno

libre de obstáculos el pie que entra en contacto con el suelo puede generar nueve tipos de impacto diferentes: sobre uno de los cuatro vértices del pie, sobre una de las cuatro aristas o como un contacto entre dos superficies planas. El modelo de simulación comprende el cálculo del vector de aceleraciones generalizadas y el cálculo del vector de fuerzas de reacción entre el pie y el suelo. Estas fuerzas, a diferencia de las aceleraciones generalizadas, deben satisfacer dos restricciones unilaterales, representadas por desigualdades matemáticas. La primera, la componente normal del vector de fuerzas de reacción debe ser no negativa. Esta componente impide que el pie atraviese el suelo pero no puede impedir que este pierda contacto. La segunda, la magnitud de las componentes tangenciales del vector de fuerzas de reacción debe ser menor o igual al producto entre el coeficiente de fricción y la fuerza normal. Este modelo integra las características del paciente (robot bípedo) y la prótesis. Puede ser usado como una evaluación preliminar que permita ajustar los parámetros dinámicos de la prótesis, antes de su implementación.

Este documento está compuesto de cuatro partes. En la primera parte se describen los conceptos básicos de la marcha. En la segunda parte la simulación de una prótesis pasiva de pierna es presentada. En la tercera parte el modelo biomecánico de la prótesis de pierna es desarrollado. La parte final está dedicada a conclusiones y perspectivas.

## 2. Descripción de la Marcha Humana

El análisis del movimiento humano desde la perspectiva de la biomecánica, parte de una concepción mecanicista que considera el cuerpo humano como un sistema formado por una serie de segmentos sobre los cuales actúan fuerzas externas e internas. Este sistema puede analizarse mediante dos tipos básicos de enfoques: el primer planteamiento, se basa fundamentalmente en el análisis cinemático del movimiento humano. El segundo enfoque, profundiza en las capacidades elásticas y deformadoras de los materiales biológicos que componen el cuerpo, (Cifuentes et al., 2010).

En el proceso de locomoción bípeda el cuerpo se mueve de forma erguida hacia adelante, siendo su peso soportado alternativamente por ambas piernas. Mientras el cuerpo se desplaza sobre la extremidad soporte, la otra pierna se balancea como preparación para el siguiente apoyo. Siempre un pie se encuentra sobre el piso, y en el periodo de transferencia del peso del cuerpo de la pierna de soporte a la otra, existe un breve lapso de tiempo en el cual ambos pies descansan simultáneamente sobre el suelo. Al aumentar la velocidad de la marcha, los periodos bipodales o de doble soporte se tornan más cortos, hasta que el sujeto eventualmente comienza a correr, siendo así reemplazados por lapsos breves de tiempo en los que ambos pies se encuentran en el aire. El plano sagital se identifica con el plano de progresión de movimiento; los movimientos más importantes de las articulaciones que permiten la caminata ocurren en este plano, aunque se requieren movimientos adicionales en el plano frontal para lograr un adecuado balance y en el plano transversal para mejorar la eficiencia energética de la caminata, (Chevallerau et al., 2009).

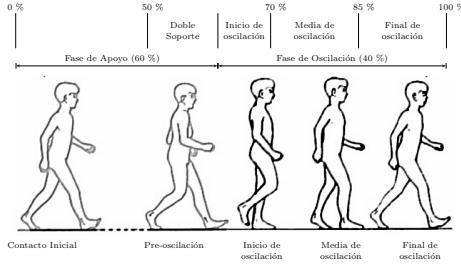


Figura 2: Ciclo de marcha humana

Durante un ciclo de marcha completo cada pierna pasa por una fase de apoyo, durante la cual el pie se encuentra en contacto con el suelo y por una fase de oscilación, en la cual el pie se halla en el aire mientras se desplaza hacia adelante como preparación para el siguiente apoyo, como se muestra en la Figura 2. La fase de apoyo (stance phase) comienza con el contacto inicial y finaliza con el despegue del antepié. Se destacan cinco momentos a saber: contacto inicial, inicial de apoyo o de respuesta de carga, media del apoyo, final del apoyo y previa a la oscilación. La fase de oscilación (swing phase) transcurre desde el instante de despegue del antepié hasta el contacto con el suelo y la constituyen tres momentos: inicial de oscilación, media de la oscilación y final de la oscilación, (Ivancevic and Ivancevic, 2008).

### 3. Modelado y simulación de una prótesis pasiva de pierna

En esta sección se presenta el modelo matemático de la prótesis pasiva de pierna mostrada en la Figura 3. Para el modelado se consideraron dos coordenadas generalizadas. La primera, denotada  $q_0$ , es la distancia entre el suelo y el centro de gravedad del cuerpo inferior de la prótesis. La segunda, denominada  $q_1$ , es la distancia entre el suelo y el cuerpo superior de la prótesis. Dichos cuerpos interactúan a través de una articulación prismática accionada por un sistema resorte-amortiguador pasivo. El objetivo de este sistema pasivo es absorber los impactos que se generan en el momento en que la prótesis entra en contacto con el suelo.

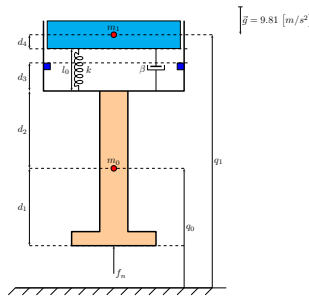


Figura 3: Prótesis pasiva de pierna

#### 3.1. Modelo de balanceo

En base las leyes de Newton se puede obtener el modelo de la prótesis cuando ésta no está en contacto con el suelo ( $f_n = 0$ )

$$\begin{aligned}\ddot{q}_0 &= +\frac{k}{m_0}(q_1 - q_0 - d_m) - \frac{\beta}{m_0}(\dot{q}_0 - \dot{q}_1) - g \\ \ddot{q}_1 &= -\frac{k}{m_1}(q_1 - q_0 - d_m) - \frac{\beta}{m_1}(\dot{q}_1 - \dot{q}_0) - g\end{aligned}\quad (1)$$

Siendo  $m_0$  la masa del cuerpo que representa la prótesis,  $m_1$  la masa del cuerpo que representa el conjunto paciente-muñón,  $k$  la constante elástica del resorte,  $l_0$  su elongación en reposo,  $\beta$  el coeficiente de viscosidad del amortiguador y  $g$  la aceleración gravitacional.  $d_m \equiv d_2 + d_4 + l_0$  es la distancia entre los centros de gravedad de los cuerpos de la prótesis cuando el resorte está en su elongación en reposo. Las distancias  $d_2$  y  $d_4$  se detallan en la Figura 3.

#### 3.2. Modelo de contacto

Cuando la prótesis se encuentra en contacto con el suelo el modelo resultante es similar a (1), siendo la única diferencia entre estos la aparición de una fuerza de reacción  $f_n$  no nula

$$\begin{aligned}\ddot{q}_0 &= +\frac{k}{m_0}(q_1 - q_0 - d_m) - \frac{\beta}{m_0}(\dot{q}_0 - \dot{q}_1) - g + \frac{f_n}{m_0} \\ \ddot{q}_1 &= -\frac{k}{m_1}(q_1 - q_0 - d_m) - \frac{\beta}{m_1}(\dot{q}_1 - \dot{q}_0) - g\end{aligned}\quad (2)$$

Si la prótesis está en contacto permanente con el suelo  $q_0 = d_1$ ,  $\dot{q}_0 = 0$  y  $\ddot{q}_0 = 0$ . En tal caso la ecuación (2) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_0 &= 0 \\ \ddot{q}_1 &= -\frac{k}{m_1}(q_1 - d_1 - d_m) - \frac{\beta}{m_1}\dot{q}_1 - g\end{aligned}\quad (3)$$

Los modelos (1) y (3) permiten determinar respectivamente el comportamiento de la prótesis en las fases de balanceo y de contacto pero no el instante en que ocurre el impacto.

#### 3.3. Modelo de impacto

Para modelar los impactos se utilizará la ley de restitución Newton, (Landau and Lifshitz, 1978). La cual conlleva a discontinuidades en las velocidades normales de los puntos de contacto. Para explicar matemáticamente estas discontinuidades las fuerzas de reacción que se generan durante el instante del impacto deben suponerse impulsionales (las fuerzas impulsionales generan aceleraciones impulsionales que cuando son integradas producen velocidades discontinuas), (Rengifo, 2011). Alrededor del instante del impacto,  $t = t_i$ , la fuerza de reacción se supone igual a  $p_n \delta(t - t_i)$ . Siendo  $p_n$  la magnitud de la impulsión y  $\delta(t - t_i)$  la distribución de Dirac.

En el instante del impacto se satisfacen las siguientes condiciones  $q_0 = d_1$  y  $\dot{q}_0 < 0$ . Al aplicar la ley de restitución de Newton se obtiene:

$$\dot{q}_0(t_i^+) = -\epsilon \dot{q}_0(t_i^-) \quad (4)$$

Donde  $\epsilon$  es el coeficiente de restitución entre la base de la prótesis y el suelo.  $\dot{q}_0(t_i^-)$  y  $\dot{q}_0(t_i^+)$  son respectivamente las velocidades del cuerpo de base un instante infinitesimal justo antes y justo después del impacto. La ecuación (4) no constituye un modelo completo de la fase de impacto dado que no permite determinar  $\dot{q}_1(t_i^+)$  (la velocidad con respecto al suelo del cuerpo de la prótesis que está en contacto con el muñón). Para obtener dicha velocidad se integra (2) alrededor del instante del impacto. Al anular la integral de los términos constantes y de aquellos que dependen únicamente de las posiciones y de las velocidades se obtiene:

$$\int_{t_i^-}^{t_i^+} \begin{bmatrix} \ddot{q}_0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} dt = \int_{t_i^-}^{t_i^+} \begin{bmatrix} \frac{p_n}{m_0} \delta(t - t_i) \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo y las propiedades de la distribución de *Dirac* se obtiene

$$\dot{q}_0(t_i^+) - \dot{q}_0(t_i^-) = \frac{p_n}{m_0} \quad (5)$$

$$\dot{q}_1(t_i^+) - \dot{q}_1(t_i^-) = 0 \quad (6)$$

De (4) y (6) se obtiene el modelo de impacto

$$\begin{aligned} \dot{q}_0(t_i^+) &= -\epsilon \dot{q}_0(t_i^-) \\ \dot{q}_1(t_i^+) &= \dot{q}_1(t_i^-) \end{aligned} \quad (7)$$

Una primera conclusión que se puede obtener del modelo anterior es que el sistema resorte-amortiguador, independientemente de su parametrización garantiza la continuidad de  $\dot{q}_1$  durante el impacto.

### 3.4. Cálculo de las constantes del resorte y del amortiguador

La constante  $k$  del resorte debe garantizar que cuando esté comprimido al 80 % de su elongación de reposo ejerza una fuerza igual al peso  $m_1 g$  ( $m_1$  se obtiene sumando la masa del cuerpo superior de la prótesis más la mitad del masa de la persona que la porta). Lo anterior significa que al reemplazar  $q_1 = d_1 + d_2 + d_4 + 0.8 l_0$  y  $\dot{q}_1 = 0$  en (3), la aceleración resultante  $\ddot{q}_1$  debe ser cero. Al despejar  $k$  se obtiene

$$k = \frac{m_1 g}{0.2 l_0}$$

Para el cálculo de  $\beta$  se aplica el cambio de variable  $x \triangleq q_1 - d_1 - d_m - m_1 g/k$  a la ecuación (3) con el fin de obtener el modelo clásico de un sistema masa-resorte-amortiguador

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

Dónde,  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  y  $\xi = \frac{\beta}{2\sqrt{mk}}$ . La constante  $\beta$  del amortiguador debe garantizar que el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  sea lo suficientemente alto como para impedir que el impacto de la prótesis con el suelo genere oscilaciones en la articulación prismática por un periodo de tiempo prolongado. El valor numérico de  $\beta$  se obtiene fijando el coeficiente de amortiguamiento en  $\xi = \sqrt{2}/2$ .

### 3.5. Resultados numéricos

En la Figura 4 se muestra el sistema a eventos discretos utilizado para simular las fases de balanceo, contacto e impacto de la prótesis presentada en la Figura 3. Si por ejemplo, el sistema inicia en la fase de balanceo, la ecuación (1) se resuelve utilizando un algoritmo de integración numérica de ecuaciones diferenciales como el de *Runge-Kutta*. Cuando se detecta una colisión entre la base de la prótesis y el suelo ( $q_0 = d_1$  y  $\dot{q}_0 < 0$ ), la integración numérica se interrumpe y se aplica el modelo de impacto descrito por (7). Las velocidades obtenidas a partir de dicho modelo se utilizan como condiciones iniciales para reiniciar el algoritmo de integración, bien sea aplicando el modelo para la fase de balanceo (1) o el modelo para la fase de contacto (3). Si  $\dot{q}_0(t_i^+) > 0$  se aplica el modelo de balanceo, en el caso contrario el modelo de contacto (3). Se resalta que después del impacto el valor obtenido de  $\dot{q}_0(t_i^+)$  debe ser no negativo para evitar que en la simulación la prótesis penetre el suelo.

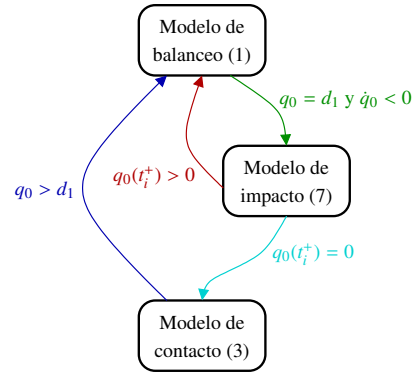
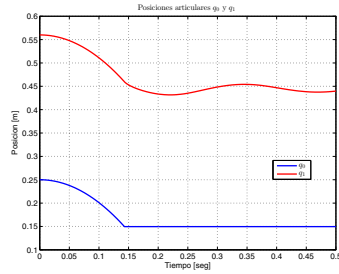


Figura 4: Sistema a eventos discretos utilizado para simular las fases de balanceo, contacto e impacto de la prótesis.

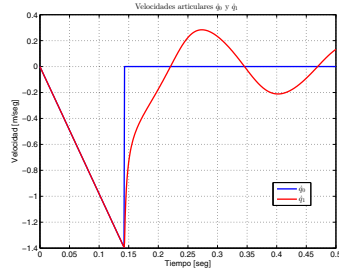
A continuación se presentan los valores numéricos utilizados para la simulación del modelo de la prótesis:  $d_1 = 0.15m$ ,  $d_2 = 0.15m$ ,  $d_3 = 0.09m$ ,  $d_4 = 0.01m$ ,  $l_0 = 0.15m$ ,  $m_0 = 1kg$ ,  $m_1 = 40kg$ ,  $g = 9.81m/seg^2$ ,  $\epsilon = 0$ . Como condiciones iniciales se utilizaron  $q_0 = 0.25m$  (la base de la prótesis a  $0.1m$  por encima del suelo),  $q_1 = 0.56m$  (el resorte en su elongación de reposo),  $\dot{q}_0 = 0$ ,  $\dot{q}_1 = 0$ . La Figura 5(a) muestra que para  $t > 0.143seg$  la variable  $q_0$  toma un valor constante de  $0.15m$ . Lo anterior significa que después del impacto la base de la prótesis permanece en contacto con el suelo. Adicionalmente, se debe asegurar que después del impacto el resorte no se comprima más allá del 40 % de su elongación de reposo, valor a partir del cual se considera que este se comporta como un cuerpo rígido. Cuando la prótesis se encuentra en contacto con el suelo y el resorte se encuentra comprimido en un 40 %, el valor de  $q_1$  debería ser igual  $d_1 + d_2 + 0.6 l_0 + d_4 = 0.4m$ . En la Figura 5(a) se verifica que después del impacto  $q_1(t)$  toma valores por encima de  $0.4m$ .

La Figura 5(b) confirma que el sistema resorte-amortiguador garantiza la continuidad de  $\dot{q}_1$  alrededor del instante del impacto (ver (6)). En dicha figura se muestra que después de la colisión entre la prótesis y el suelo  $\dot{q}_1$  disminuye  $1.4m/s$  en un

intervalo de tiempo de aproximadamente 0.05 segundos, lo cual es equivalente a una desaceleración de  $-2.85g$ , siendo  $g$  la constante de aceleración gravitacional. Al aumentar el coeficiente de amortiguamiento se disminuye el tiempo requerido para disipar la energía asociada al impacto; sin embargo una desaceleración excesiva no es aconsejable porque podría generar lesiones (edemas) en el muñón, (Colombo et al., 2010). Por otro lado, un coeficiente de amortiguamiento muy bajo conlleva a dos inconvenientes. El primero, un comportamiento oscilatorio de la prótesis y el segundo una posible compresión del resorte más allá de su rango elástico.



(a) Posición cartesiana de la prótesis



(b) Cambio en las velocidades del pie y muñón de la prótesis

Figura 5: Comportamiento cinemático de la prótesis

El enfoque a eventos discretos utilizado en esta sección es difícilmente extensible a sistemas más complejos. La principal limitante viene del aumento en el número de estados a medida que se incrementa la cantidad de puntos de contacto. Por ejemplo, para el robot presentado en la Figura 1, se consideran cuatro puntos de contacto, dos por cada pie. Considerando que cada punto puede estar: (i) sin contacto con el suelo, (ii) en contacto con deslizamiento, o (iii) en contacto sin deslizamiento, el número total de estados asociado a las fases de balanceo y de contacto es de  $3^4 = 81$ . Sin embargo, al considerar que cuando los extremos anterior y posterior de un mismo pie están en contacto con el suelo, estos no pueden estar en estados diferentes, el número de posibilidades se reduce a 49. A estos estados se deben adicionar los relacionados con el instante del impacto. Para el modelado de sistemas con numerosos puntos de contacto se han propuesto formulaciones basadas en el problema lineal de complementariedad, (Cottle et al., 1992), unas en tiempo continuo, (Pang and Trinkle, 1996) (enfoque aceleración-fuerza) y otras en tiempo discreto, (Anitescu et al., 1999) (enfoque velocidad impulsión). En la actualidad se privilegia el uso del se-

gundo enfoque debido a que este no requiere una formulación independiente para modelar los impactos, y que no se requiere detectar las transiciones entre contactos con y sin deslizamiento, (Acary and Brogliato, 2008).

### 3.6. Consideraciones para el diseño de una prótesis de pierna por encima de la rodilla

Para imitar la fase de oscilación de las extremidades inferiores y mantener el equilibrio del cuerpo, la prótesis debe ser estable durante la fase de apoyo y el movimiento de flexión y extensión controlable durante la fase de oscilación, (Xie et al., 2010). La prótesis debe simular la marcha humana normal, tener la capacidad de controlar la elevación del talón en la fase inicial, de giro libre en la etapa media de la fase de oscilación, y oscilación hacia adelante durante la etapa final de la fase de oscilación.

El control del par en la articulación de la rodilla es el factor clave que afecta el desempeño de la prótesis, (Xie et al., 2010). Durante la fase de soporte, el par de la articulación de la rodilla debe ser suficientemente grande para asegurar la estabilidad de las prótesis. Durante la fase de oscilación, la prótesis debe extenderse y por otra parte, tener amortiguación para evitar sobrepasos en el instante del impacto. El problema más difícil del control de prótesis es asegurar la simetría de la marcha entre la pierna con prótesis y la pierna sana, (Kim and Oh, 2001).

Los dispositivos actuales para el control de par en la articulación de la rodilla, el más simple es el que tiene un coeficiente de fricción constante. Sin embargo, el valor del par es variable en un ciclo de la marcha. El análisis biomecánico de la marcha muestra que el par de la rodilla humana, cambia con la velocidad de la marcha y las condiciones (inclinación) del camino, (Cifuentes et al., 2010).

El par ideal para la rodilla ideal debe cumplir con los siguientes aspectos, (Jin et al., 1998):

1. Debe ser una función periódica para un ciclo de marcha.
2. Debe ajustar automáticamente el modo de función para seguir el cambio del par en distintas velocidades de marcha o estado (marcha estática o dinámica).

En la sección 4 se presenta el modelo biomecánico de la prótesis de pierna, donde la cadera y las piernas del ser humano se modelaron como un robot bípedo planar.

## 4. Modelo Matemático del Robot

La representación Lagrangiana del modelo dinámico directo en tiempo continuo del robot bípedo, ver Figura 1, y la prótesis de pierna es la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= q_v \\ \mathbf{A}(q) \cdot \dot{q}_v &= \mathbf{B} \Gamma - H(q, q_v) + \mathbf{J}_n^T(q) F_n + \mathbf{J}_t^T(q) F_t \end{aligned} \quad (8)$$

Siendo  $q \in \mathbf{R}^{10}$  y  $q_v \in \mathbf{R}^{10}$  respectivamente los vectores de posiciones y de velocidades generalizadas



$$q \triangleq \begin{bmatrix} {}^g x_0 \\ {}^g y_0 \\ q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_7 \end{bmatrix} \quad q_v \triangleq \begin{bmatrix} {}^g \dot{x}_0 \\ {}^g \dot{y}_0 \\ \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_7 \end{bmatrix} \quad (9)$$

El vector  $q$  contiene las 7 posiciones articulares ( $q_1, \dots, q_7$ ), la posición del sistema de referencia  $\langle x_0, y_0 \rangle$  con respecto al referente  $\langle x_g, y_g \rangle$ , y  $q_0$  la orientación de la cadera con respecto a la horizontal. Las posiciones  $q_1, q_3, q_4$ , representan respectivamente las articulaciones rotoides de la cadera, rodilla y talón de la pierna derecha (pierna con la prótesis). De la misma forma, las posiciones  $q_5, q_6, q_7$ , representan las articulaciones rotoides de la cadera, rodilla y talón de la pierna izquierda. La articulación prismática  $q_2$  es la distancia entre el muñón y la base de la prótesis. La matriz  $\mathbf{A}(q) \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$  es la matriz de inercia. El vector  $H(q, q_v) \in \mathbb{R}^{10}$  contiene el efecto de las fuerzas de gravedad, centrífugas y de Coriolis. El vector  $\Gamma \in \mathbb{R}^7$  contiene el par motor de cada una de las 7 articulaciones del robot. La matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{10 \times 7}$  está definida de tal manera que al multiplicarla por el vector  $\Gamma$  se obtiene un vector cuyas 3 primeras componentes son cero, y las 7 siguientes son las componentes de  $\Gamma$ . La matriz  $\mathbf{B}$  indica que las 3 primeras coordenadas (posición y orientación absolutas) no son accionadas directamente. El modelo del sistema resorte amortiguador que constituye la prótesis, se escribe

$$\Gamma_2 = -k(q_2 - d_1 - d_2) - \beta \dot{q}_2 \quad (10)$$

Donde  $k$  es la constante de rigidez del resorte y  $\beta$  el coeficiente de fricción viscosa. La ecuación (10) representa la fuerza total en el sistema resorte amortiguador. El vector  $F_n$  contiene las fuerzas de reacción normales ejercidas por el suelo sobre los vértices del pie que se encuentran en contacto con este. De la misma manera,  $F_t$  contiene las fuerzas de reacción debidas a la fricción. Los vectores  $F_n$  y  $F_t$  cambian de dimensión a lo largo del ciclo de marcha del robot. Así por ejemplo, si el robot está apoyado sobre los vértices anterior y posterior del pie izquierdo (vértices 3 y 4 de la Figura 6),  $F_n$  y  $F_t$  estarán conformados así  $F_n = [f_{n_3} \ f_{n_4}]^T$ ,  $F_t = [f_{t_3} \ f_{t_4}]^T$ . En general:

$$F_n = \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{n_i} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad F_t = \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{t_i} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N}_v$$

$\mathcal{N}_v$  es el conjunto de los vértices del pie que se encuentran en contacto con el suelo. La dimensión de  $F_n$  y de  $F_t$ , denotada  $p$ , es igual al número de elementos del conjunto  $\mathcal{N}_v$ . La matrices  $\mathbf{J}_n(q) \in \mathbb{R}^{p \times 10}$  y  $\mathbf{J}_t(q) \in \mathbb{R}^{p \times 10}$  permiten calcular las velocidades normales y tangenciales de los vértices del pie en contacto con el suelo. Dichas velocidades se denotan respectivamente como  $\dot{\phi}_{n_i}$  y  $\dot{\phi}_{t_i}$ . Al agrupar las componentes  $\dot{\phi}_{n_i}$  y  $\dot{\phi}_{t_i}$  ( $i \in \mathcal{N}_v$ ) en los vectores  $\Phi_n$  y  $\Phi_t$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \mathbf{J}_n(q) q_v \\ \Phi_t &= \mathbf{J}_t(q) q_v \end{aligned} \quad (11)$$

A nivel de cada pie se consideraron dos posibles puntos de contacto, uno por cada vértice de la cara inferior. La ubicación de estos vértices denotados  $v_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) se presenta en la Figura 6. En el caso de un suelo plano y libre de obstáculos esta consideración permite modelar todas las posibles formas de contacto y de impacto entre el pie y el suelo. Los impactos con el pie paralelo al suelo se modelan como la colisión simultánea de los vértices: anterior y posterior. El modelo descrito por la ecuación (8) comprende el cálculo del vector de aceleraciones generalizadas y el cálculo del vector de fuerzas de reacción entre el pie y el suelo. Estas fuerzas, a diferencia de las aceleraciones generalizadas, deben satisfacer dos restricciones unilaterales, representadas por desigualdades matemáticas. La primera, la componente normal del vector de fuerzas de reacción debe ser no negativa. Esta componente impide que el pie atraviese el suelo pero no puede impedir que este pierda contacto. La segunda, la magnitud de las componentes tangenciales del vector de fuerzas de reacción debe ser menor o igual al producto entre el coeficiente de fricción y la fuerza normal. El modelo dinámico descrito por la ecuación 8 está constituido entonces por un conjunto de ecuaciones diferenciales donde una parte de las incógnitas está sujeta a desigualdades matemáticas, (Anitescu and Potra, 1997).

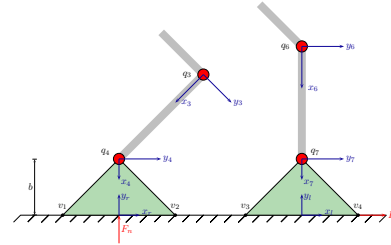


Figura 6: Pies del robot

#### 4.1. Modelo de tiempo discreto basado en el método explícito de Euler

Para resolver la ecuación diferencial ordinaria (8) se discretizará mediante el método explícito de Euler. Esto significa que la ecuación diferencial que describe el modelo dinámico directo debe transformarse en una ecuación en diferencias. Para ello es necesario aproximar las derivadas de los vectores  $q$  y  $q_v$  utilizando una diferencia de primer orden

$$\begin{aligned} q^{(k+1)} &= q^{(k)} + h \cdot q_v^{(k)} \\ \mathbf{A} \cdot q_v^{(k+1)} &= \mathbf{A} q_v^{(k)} + h [\mathbf{B} \Gamma - H + \mathbf{J}_n F_n^{(k)} + \mathbf{J}_t F_t^{(k)}] \end{aligned} \quad (12)$$

$q^{(k)}$  y  $q_v^{(k)}$  representan respectivamente los valores de los vectores  $q$  y  $q_v$  en el instante  $t_k$ . La constante  $h$  es definida como  $h \triangleq t_{k+1} - t_k$ . Las fuerzas normales de reacción entre el pie y el suelo deben satisfacer la siguiente ecuación, conocida como condición de Signorini, (Moreau, 1988).

$$\dot{\phi}_{n_i}^{(k+1)} \geq 0 \quad \perp \quad f_{n_i}^{(k)} \geq 0, \quad i \in \mathcal{N}_v \quad (13)$$

La condición (13) es interpretada de la siguiente manera : la fuerza normal de reacción calculada en el instante  $t_k$  debe producir una velocidad positiva o nula en el instante  $t_{k+1}$  con el fin de evitar la penetración del pie en el suelo. La ecuación (13) es válida para el cálculo de las fuerzas de contacto y de impacto. La condición de complementariedad entre la fuerza tangencial en el instante  $k$  y la velocidad tangencial en el instante  $k + 1$  es, (Moreau, 1988):

$$\mu f_{n_i}^{(k)} - |f_{t_i}^{(k)}| \geq 0 \quad \perp \quad \dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)} \quad i \in \mathcal{N}_v \quad (14)$$

$$\dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)} f_{t_i}^{(k)} \leq 0$$

La anterior ecuación indica que si la magnitud de la fuerza tangencial para el punto de contacto  $i$  es estrictamente menor a  $\mu f_{n_i}^{(k)}$ , entonces velocidad tangencial  $\dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)}$  debe ser nula para satisfacer la condición de complementariedad impuesta por el operador  $\perp$ . Si la velocidad tangencial es no nula, entonces la magnitud de la fuerza tangencial toma el valor máximo permitido por la ley de *Coulomb* que es  $\mu f_{n_i}^{(k)}$ . La desigualdad  $\dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)} f_{t_i}^{(k)} \leq 0$  asegura que la fuerza y la velocidad tangencial tendrán sentidos opuestos. Debe tenerse presente que  $\dot{\phi}_{n_i}^{(k+1)}$  y  $\dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)}$  dependen del vector de velocidades generalizadas  $q_v^{(k+1)}$ , y este a su vez de los vectores de fuerzas de reacción  $F_n^{(k)}$  y  $F_t^{(k)}$  (ver (12)). Lo anterior implica que las ecuaciones (13) y (14) están acopladas y que por lo tanto las fuerza normales y tangenciales deben calcularse simultáneamente para todos los puntos de contacto  $i \in \mathcal{N}_v$ .

A pesar de la facilidad en la interpretación física de la ecuación (14), esta no puede resolverse directamente sino que debe transformarse en el siguiente problema de optimización con restricciones

$$\text{Minimice: } \sum_{i \in \mathcal{N}_v} [\min(\mu f_{n_i}^{(k)} - |f_{t_i}^{(k)}|, \dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)})]^2 \quad (15)$$

$$\text{Sujeto a: } \dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)} f_{t_i}^{(k)} \leq 0$$

La complejidad computacional del anterior problema de optimización limita significativamente la aplicabilidad de la ecuación (14).

#### 4.2. Intervalo de fricción tangencial

Con el objetivo de facilitar el cálculo de las fuerzas de fricción tangenciales, estas serán descritas como la resta de dos escalares no negativos denotados  $b_{1_i}$  y  $b_{2_i}$

$$f_{t_i} = b_{1_i} - b_{2_i}$$

Si adicionalmente se impone que al menos uno de los escalares debe ser cero, entonces se obtiene  $|f_{t_i}| = b_{1_i} + b_{2_i}$ . De esta manera la desigualdad  $\mu f_{n_i} - |f_{t_i}| \geq 0$  puede escribirse como  $\mu f_{n_i} - b_{1_i} - b_{2_i} \geq 0$  la cual es lineal con respecto a las incógnitas  $b_{1_i}$  y  $b_{2_i}$ . Al describir las fuerzas tangenciales de cada punto de contacto como la resta de dos escalares no negativos, el cálculo

de estas se puede escribir como un problema lineal de complementariedad

$$\mu f_{n_i}^{(k)} - b_{1_i}^{(k)} - b_{2_i}^{(k)} \geq 0 \quad \perp \quad \lambda_i^{(k)} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^{(k)} + \dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)} \\ \lambda_i^{(k)} - \dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \perp \quad \begin{bmatrix} b_{1_i}^{(k)} \\ b_{2_i}^{(k)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (16)$$

Si  $|\dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)}| \neq 0$  entonces  $\lambda_i^{(k)}$  debe ser mayor que cero para garantizar que tanto  $\lambda_i^{(k)} + \dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)}$  como  $\lambda_i^{(k)} - \dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)}$  sean no negativos. Sin embargo si  $\lambda_i^{(k)} > 0$ , entonces  $b_{1_i}^{(k)} + b_{2_i}^{(k)}$  debe ser igual a  $\mu f_{n_i}^{(k)}$ . Lo anterior implica que cuando la velocidad tangencial es no nula, la magnitud de la fuerza de fricción toma el máximo valor posible  $\mu f_{n_i}^{(k)}$ . Si  $b_{1_i}^{(k)} + b_{2_i}^{(k)}$  es estrictamente menor que  $\mu f_{n_i}^{(k)}$  entonces  $\lambda_i^{(k)}$  debe ser cero. En tal caso la única manera de garantizar la no negatividad de  $\dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)}$  y de  $-\dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)}$  es que  $\dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)}$  sea cero. Con el fin de simplificar la escritura de (16) se definen las siguientes constantes  $\omega \triangleq [1, -1]$ ,  $e \triangleq [1, 1]^T$ , y  $b_i \triangleq [b_{1_i}, b_{2_i}]^T$

$$\mu f_{n_i}^{(k)} - e^T \cdot b_i^{(k)} \geq 0 \quad \perp \quad \lambda_i^{(k)} \geq 0$$

$$e \cdot \lambda_i^{(k)} + \omega^T \cdot \dot{\phi}_{t_i}^{(k+1)} \geq 0 \quad \perp \quad b_i^{(k)} \geq 0 \quad (17)$$

Con el objetivo de reescribir las ecuaciones (17) en forma matricial, se definen las siguientes matrices

$$\mathbf{E} \triangleq \begin{bmatrix} e & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} \triangleq \begin{bmatrix} \omega & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega \end{bmatrix} \quad (18)$$

En el caso del enfoque velocidad-impulsión la utilización de las condiciones lineales de complementariedad conlleva a la siguiente formulación

$$F_n^{(k)} \geq 0 \quad \perp \quad \Phi_n^{(k+1)} \geq 0$$

$$\lambda^{(k)} \geq 0 \quad \perp \quad \mu \cdot F_n^{(k)} - \mathbf{E}^T \cdot \beta^{(k)} \geq 0 \quad (19)$$

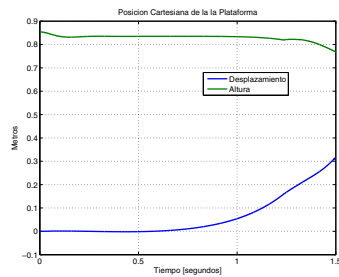
$$\beta^{(k)} \geq 0 \quad \perp \quad \mathbf{E} \cdot \lambda^{(k)} + \mathbf{\Omega}^T \cdot \dot{\Phi}_t^{(k+1)} \geq 0$$

Para resolver (19) primero se deben expresar  $\dot{\Phi}_t^{(k+1)}$  y  $\dot{\Phi}_n^{(k+1)}$  en función de  $q_v^{(k+1)}$  utilizando (11). Posteriormente,  $q_v^{(k+1)}$  se describe en términos de  $F_t^{(k)}$  y  $F_n^{(k)}$  utilizando el modelo (12). Es fundamental recalcar que el método de integración debe garantizar una relación lineal entre las velocidades  $q_v^{(k+1)}$  y las fuerzas  $F_t^{(k)}$  y  $F_n^{(k)}$  con el fin de que (19) sea un problema lineal de complementariedad y no uno no lineal.

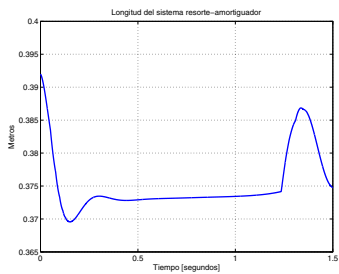
#### 4.3. Simulación

Para simular el comportamiento dinámico del robot presentado en la Figura 1 se desarrolló un programa en *Matlab* que consta de dos etapas fundamentales. La primera consiste en resolver el problema lineal de complementariedad descrito por

la ecuación (19) y así encontrar las fuerzas de reacción  $F_n^{(k)}$ , y  $F_t^{(k)} = \Omega \beta^{(k)}$ . Posteriormente estas fuerzas se inyectan en el modelo (12) con el fin de calcular  $q^{(k+1)}$  y  $q_v^{(k+1)}$ . Durante el ciclo de marcha se tuvo en cuenta para la simulación la fase de apoyo y la fase de oscilación de la pierna con prótesis, la Figura 7 (a) describe la posición cartesiana de la cadera del robot (cuerpo 0) con respecto al referente  $\langle x_g, y_g \rangle$  y la longitud del sistema resorte-amortiguador con respecto al tiempo para la fase de apoyo. Durante los primeros 200 ms el resorte de la prótesis se comprime aproximadamente al 5 % de su longitud inicial. Cuando la pierna sana impacta el suelo (aproximadamente en 1.2 s), el resorte se estira, preparando a la pierna con prótesis para despegar del suelo y entrar en la fase de oscilación. La altura de la cadera varía, ya que no se hizo control de la orientación absoluta del robot y el par motor de las articulaciones 1 a 7 se seleccionó para compensar las fuerzas de gravedad. Adicionalmente para la articulación  $q_2$  se implementó un control PD para aumentar la rigidez mecánica.



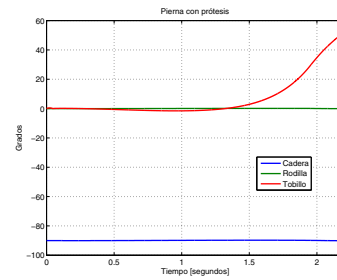
(a) Posición cartesiana de la plataforma



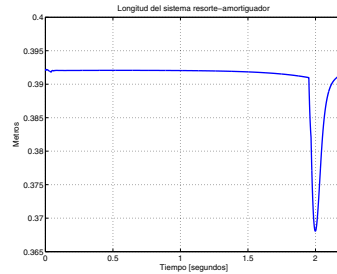
(b) Longitud sistema resorte-amortiguador

Figura 7: Comportamiento de la prótesis. Fase de Apoyo

Para la fase de oscilación de la pierna con prótesis, la longitud del resorte permanece constante como se muestra en la Figura 8, en el momento del impacto, el talón gira libremente y el resorte se comprime, entrando en la fase de apoyo. Para ambas fases los valores de la constante del resorte y el coeficiente de amortiguamiento viscoso permanecen constantes. Las Figuras 7 y 8 muestran el cambio de longitud del resorte en las fase de apoyo y oscilación del ciclo de marcha, desde el punto de vista biomédico, se desea que el muñón no sufra cambios bruscos de velocidad, (Cifuentes et al., 2010). Esto es posible si se dispone de una prótesis construida con dispositivos de impedancia mecánica variable, (Vanderborght et al., 2013), donde se puede controlar el valor del coeficiente de fricción viscosa.



(a) Orientación de la pierna con prótesis



(b) Longitud sistema resorte-amortiguador

Figura 8: Comportamiento de la prótesis. Fase de Oscilación

## 5. Conclusiones y perspectivas

El modelo mecánico de una prótesis de pierna por encima de la rodilla se construyó a partir de la representación de la cadera y las piernas de un ser humano como un robot bípedo planar. A partir del análisis de las gráficas obtenidas, se puede afirmar que los valores de la constante del resorte y el coeficiente de fricción viscosa deben ser variables en el tiempo (en el caso de una prótesis real), así entonces en la fase de oscilación se desea que la prótesis se comporte como un sistema resorte-amortiguador que no permita el movimiento del muñón, mientras que en el instante del impacto se espera que la prótesis absorba la energía del mismo y después de la colisión un sistema que retorne rápidamente, sin cambios bruscos en la velocidad del muñón, a su posición de equilibrio estático.

El desarrollo del simulador permitió sintetizar modelos dinámicos con restricciones de complementariedad y leyes de control para el robot y la prótesis que no hubieran podido implementarse utilizando las herramientas software disponibles en el mercado. Además, se constituye como una herramienta de diseño y validación de parámetros dinámicos y algoritmos de control, como una etapa previa a la construcción de la prótesis.

En el caso del enfoque velocidad-impulsión la discretización del modelo dinámico conlleva a que las simulaciones deban ser realizadas a paso fijo y no a paso adaptativo. Los métodos de paso fijo, sin embargo, pueden requerir de tamaños de paso prohibitivamente pequeños con el fin de asegurar la estabilidad numérica de la solución obtenida. Lo anterior claro está implica tiempos de simulación excesivamente largos.

Se propone como trabajo futuro, la implementación real de la prótesis. En la actualidad se dispone de amortiguadores MR (Magneto-Reológicos), el Fluido Magneto-reológico (MRF) en



el amortiguador MR es un fluido controlable. Mediante el control de la fuerza de un campo magnético externo, el MRF puede cambiar de líquido a semi-sólido, en milisegundos, para lograr un amplio rango de control de amortiguación y fuerza. El amortiguador MR tiene un número de ventajas, tales como una estructura simple, de pequeño volumen, respuesta inteligente y bajo consumo de energía (menos de 50 W). Además en caso de interrupción de energía, el amortiguador MR todavía puede actuar como un dispositivo de disipación de energía pasiva (amortiguador viscoso), que sigue desempeñando su acción de control.

## English Summary

### Biomechanical Model of a Prosthetic Leg

#### Abstract

This paper presents the biomechanical model of a prosthetic leg. In order to study the change of speed in the joint prosthesis-stump upon impact of the foot with the ground is modeled as a spring-damper system, allowing demonstrate the need to build the stump-prosthesis junction impedance devices mechanical variable. This platform is also proposed with the aim of simulating virtual representations to a patient with prosthesis, as a stage prior to the actual implementation thereof.

#### Keywords:

Human gait, Biomechanical model, prosthesis, simulation.

### Agradecimientos

Los autores expresan sus más sinceros agradecimientos a la Universidad del Cauca en Colombia por todo el apoyo académico y financiero brindado en este proyecto.

### Referencias

- Acary, V., Brogliato, B., 2008. Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems: Applications in Mechanics and Electronics. Vol. 35 of Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer Verlag.
- Anitescu, M., Potra, F., 1997. Formulating dynamic multi-rigid-body contact problems with friction as solvable linear complementarity problem. *ASME Nonlinear Dynamics* 14, 231 – 247.
- Anitescu, M., Stewart, D., Potra, F. A., July 1999. Time-stepping for three-dimensional rigid-body dynamics 177 (3 – 4), 183 – 197.
- Chevallerau, C., Bessonnet, G., Abba, G., Aoustin, Y., 2009. Bipedal Robots. Modeling, design and building walking robots, 1st Edition. Wiley.
- Cifuentes, C., Martínez, F., Romero, E., 2010. Análisis teórico y computacional de la marcha normal y patológica: Una revisión. *Revista Medica Colombiana* 18, 183–196.
- Colombo, G., Filippi, S., Rizzi, C., Rotini, F., 2010. A new design paradigm for the development of custom-fit soft sockets for lower limb prostheses. *Computers in Industry* 61 (6), 513 – 523.
- Cottle, R., Pang, J., Stone, R., 1992. The Linear Complementarity Problem. Academic Press, San Diego – California – USA.
- Dellon, B., Matsuoka, Y., march 2007. Prosthetics, exoskeletons, and rehabilitation [grand challenges of robotics]. *Robotics Automation Magazine, IEEE* 14 (1), 30 –34.
- Ferris, A. E., Aldridge, J. M., Rábago, C. A., Wilken, J. M., 2012. Evaluation of a powered ankle-foot prosthetic system during walking. *Archives of physical medicine and rehabilitation* 93, 1911–1918.
- Hermi, H., Rosario, J., Cassemiro, E., 2001. Proposal of modeling, simulation and implementation of robotics leg prosthesis. In: *Engineering in Medicine and Biology Society*, 2001. Proceedings of the 23rd Annual International Conference of the IEEE. Vol. 2. pp. 1415 – 1418 vol.2.
- Hobara, H., Baum, B. S., Kwon, H.-J., Miller, R. H., Ogata, T., Kim, Y. H., Shim, J. K., 2013. Amputee locomotion: Spring-like leg behavior and stiffness regulation using running-specific prostheses. *Journal of Biomechanics* 46 (14), 2483 – 2489.
- Ivancevic, V., Ivancevic, T., 2008. Human-Like Biomechanics: A Unified Mathematical Approach to Human Biomechanics and Humanoid Robotics. Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering, v. 28. Springer.
- Jiménez-Fabián, R., Verlinden, O., 2012. Review of control algorithms for robotic ankle systems in lower-limb orthoses, prostheses, and exoskeletons. *Medical Engineering & Physics* 34 (4), 397 – 408.
- Jin, D. W., Wang, R. C., Bai, C. Q., Huang, C. H., Zhang, J. C., 1998. Swing phase control of intelligent lower limb prosthesis using electrorheological fluid. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 30, 40–43.
- Karimi, G., Tahani, M., 2010. Sep controlling parameter in design of above knee prosthesis with moving ankle. In: 17th Iranian Conference of Biomedical Engineering (ICBME). pp. 1–4.
- Kim, J. H., Oh, J.-H., 2001. Development of an above knee prosthesis using mr damper and leg simulator. In: *ICRA*. pp. 3686 – 3691.
- Landau, L., Lifshitz, E., 1978. Mecánica. No. v. 1 in *Curso de física teórica*. Reverté.
- Lee, J. H., Yi, B.-J., Lee, J. Y., 2012. Adjustable spring mechanisms inspired by human musculoskeletal structure. *Mechanism and Machine Theory* 54 (0), 76 – 98.
- Martins, M. M., Santos, C. P., Frizera-Neto, A., Ceres, R., 2012. Assistive mobility devices focusing on smart walkers: Classification and review. *Robotics and Autonomous Systems* 60 (4), 548 – 562.
- Moreau, J. J., 1988. Nonsmooth Mechanics and Applications. Vol. 302 of CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer Verlag, Ch. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, pp. 1 – 82.
- Nandi, G., Ijspeert, A., Chakraborty, P., Nandi, A., 2009. Development of adaptive modular active leg (amal) using bipedal robotics technology. *Robotics and Autonomous Systems* 57, 603 – 616.
- Pang, J., Trinkle, J., 1996. Complementarity formulations and existence of solutions of dynamic multi-rigid-body contact problems with coulomb friction 73 (2), 199 – 226.
- Pejhan, S., Farahmand, F., Parnianpour, M., 2008. Design optimization of an above-knee prosthesis based on the kinematics of gait. In: *Engineering in Medicine and Biology Society*, 2008. EMBS 2008. 30th Annual International Conference of the IEEE. pp. 4274–4277.
- Rengifo, C. F., 2011. Contributions à la commande d'un robot bipède 3D: modélisation, calcul des forces de réaction, commande et actionnement. Éditions Universitaires Européennes., Saarbrücken, Germany.
- Rovetta, A., Chettibi, T., 2003. Development of a simple and efficient above knee prosthesis. In: *International Symposium on Advances in Robot Dynamics and Control*.
- Vanderborght, B., Albu-Schaeffer, A., Bicchi, A., Burdet, E., Caldwell, D., Carloni, R., Catalano, M., Eiberger, O., Friedl, W., Ganesh, G., Garabini, M., Grebenstein, M., Grioli, G., Haddadin, S., Hoppner, H., Jafari, A., Laffranchi, M., Lefeber, D., Petit, F., Stramigioli, S., Tsagarakis, N., Damme, M. V., Ham, R. V., Visser, L., Wolf, S., 2013. Variable impedance actuators: A review. *Robotics and Autonomous Systems*.
- Vazquez, J., Velasco-Villa, M., 2013. Análisis del deslizamiento en el punto de apoyo de un robot bípedo de 5-gdl. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* 10 (2), 133 – 142.
- Wentink, E., Koopman, H., Stramigioli, S., Rietman, J., Veltink, P., 2013. Variable stiffness actuated prosthetic knee to restore knee buckling during stance: A modeling study. *Medical Engineering & Physics* 35 (6), 838 – 845.
- Whittlesey, S. N., van Emmerik, R. E., Hamill, J., 2000. The swing phase of human walking is not a passive movement. *Motor Control* 4, 273–292.
- Xie, H., Liang, Z., Li, F., Guo, L., Agosto 2010. The knee joint design and control of above-knee intelligent bionic leg based on magneto-rheological damper. *International Journal of Automation and Computing*, 277–282.